

Ausarbeitung zum Versuch

Mathematisches und physisches Pendel

Harmonische und anharmonische  
Schwingungen

Versuch 24

des physikalischen Grundpraktikums Kurs I, Teil II

an der Universität Würzburg

Sommersemester 2005 (Blockkurs)

Autor: MORITZ LENZ

Praktikumspartner: TOBIAS DAMM

Betreuer: TOBIAS KIESSLING

Versuch durchgeführt am: 2. März 2005

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Thema des Versuchs</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
3.1	Physisches Pendel . . . . .	3
3.2	Mathematisches Pendel . . . . .	3
3.2.1	Annahmen . . . . .	3
3.2.2	Differentialgleichung . . . . .	4
3.2.3	Periodendauer . . . . .	4
3.2.4	Reduzierte Länge . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Messung und Auswertung</b>	<b>5</b>
4.1	Zeitnahme mit der Stoppuhr . . . . .	5
4.2	Objektive Zeitmessung . . . . .	6
4.2.1	Auswertung . . . . .	7
4.3	Physisches Pendel . . . . .	7
4.4	Anharmonische Schwingungen . . . . .	8
4.4.1	Messungen mit Pendel 1 . . . . .	8
4.4.2	Messung mit Pendel 2 . . . . .	9
4.4.3	Auswertung . . . . .	9
4.4.4	Messung der Erdbeschleunigung . . . . .	11

## 1 Einleitung

Im Rahmen des Studiums der Physik absolviert jeder Student der Universität Würzburg im Grundstudium das physikalische Grundpraktikum. In diesem Rahmen werden eine Reihe von Versuchen durchgeführt und dokumentiert. In diesen vier Semestern werden drei Versuche besonders gründlich dokumentiert und ausgearbeitet. Das vorliegende Dokument ist eine solche Ausarbeitung.

## 2 Thema des Versuchs

In diesem Versuch wurden zuerst Messfehler bei der Zeitnahme von Periodendauern ermittelt, dann wurde mit einer genauen Zeitnahme (Lichtschranke) die Periodendauer von verschiedenen Pendeln untersucht.

Über die Messung der Periodendauer eines geeigneten Pendels wird die Erdbeschleunigung gemessen.

### 3 Theorie

#### 3.1 Physisches Pendel

Ein starrer Körper sei an der Drehachse  $A$  aufgehängt, sein Schwerpunkt  $S$  habe den Abstand  $l$  von der Drehachse  $A$ ,  $J_A$  sei das Drehmoment bezüglich der Achse  $A$ . Dann gilt für das angreifende Drehmoment:

$$M = \dot{L} = J_A \dot{\omega} = J_A \ddot{\varphi} \quad (1)$$

Dabei ist  $\varphi$  der Winkel zwischen der Senkrechten (Richtung der Erdbeschleunigung) und der Verbindungslinie von  $A$  nach  $S$ .

Gleichzeitig gilt

$$M = -mgl \sin \varphi \quad (2)$$

( $m$ : Masse des Körpers,  $g$ : Erdbeschleunigung). Miteinander gleichgesetzt ergeben Gleichungen (1) und (2) eine Differentialgleichung für  $\varphi$ :

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J_A} \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

Sucht man nach der Periodendauer  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , so kommt man nach einer Reihenentwicklung des Sinus auf das Ergebnis:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgl}} \left( 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \dots \right) \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgl}} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)}{\prod_{i=1}^n (2i)} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Tabelle 1 auf Seite 4 gibt einige Werte für  $T(\varphi)$  an.

#### 3.2 Mathematisches Pendel

##### 3.2.1 Annahmen

Ein Fadenpendel, dass in guter Näherung alle Masse am Ende des Fadens in einem kleinen Volumen vereint, nennt man mathematisches Pendel.

$\varphi/^\circ$	$\frac{T(0)-T(\varphi)}{T(0)}$	Anzahl der berechneten Glieder	$\varphi/^\circ$	$\frac{T(0)-T(\varphi)}{T(0)}$	Anzahl der berechneten Glieder
5	0.000 48	2	55	0.061	4
10	0.001 9	2	60	0.073	4
15	0.004 3	2	70	0.10	4
20	0.007 7	3	80	0.14	5
25	0.012	3	90	0.18	6
30	0.017	3	100	0.23	6
35	0.024	3	110	0.29	7
40	0.031	3	120	0.37	9
45	0.040	4	130	0.46	11
50	0.050	4			

Tabelle 1: Abweichung der Periodendauer eines physischen Pendels für grosse Auslenkungen

### 3.2.2 Differentialgleichung

Für kleine Winkel  $\varphi$  (und damit  $\sin \varphi \approx \varphi$ ) vereinfacht sich Gleichung 3 zu

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J_A} \varphi = 0, \quad (5)$$

der Gleichung des Harmonischen Oszillators. Aus den Annahmen für das mathematische Pendel folgt  $J_A = ml^2$ , die vorherige Gleichung lässt sich also als

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (6)$$

schreiben. Die Lösung für diese Differentialgleichung ist wohlbekannt, sie lautet  $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \delta)$ , wobei  $\delta$  die Anfangsphase und  $\varphi_0$  die Amplitude ist.  $\omega$  ist die Kreisfrequenz, für sie gilt  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ .

### 3.2.3 Periodendauer

Mit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  folgt für die Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (7)$$

oder nach  $g$  aufgelöst

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}. \quad (8)$$

Wir können also mit einem Pendel bekannter Länge den Ortsfaktor  $g$  bestimmen, indem wir die Periodendauer messen.

### 3.2.4 Reduzierte Länge

Um für ein physisches Pendel Gleichung (7) anwenden zu können, führt man die reduzierte Länge  $\lambda$  ein.

Vergleicht man Gleichungen (7) und (4) für kleine  $\varphi$ , so kommt man auf einen Ausdruck für die reduzierte Länge:

$$\lambda = \frac{J_A}{ml} \quad (9)$$

wobei  $l$  der Abstand zwischen Aufhängepunkt  $A$  und Schwerpunkt ist. Dann folgt für die Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \quad (10)$$

## 4 Messung und Auswertung

Für alle Versuche verwenden wir eine Halterung, in die verschiedene Pendel drehbar gelagert eingesetzt werden können. Unterhalb der Halterung, kurz oberhalb des Ende eines Pendels, ist eine Lichtschranke montiert, deren Lichtstrahl von dem durchschwingenden Pendel unterbrochen wird. Der Digitalausgang der Lichtschranke ist mit einem Zähler verbunden, der die Zeit für eine Periode misst.

### 4.1 Zeitnahme mit der Stoppuhr

Wir verwenden einen Messingstab mit rechteckigem Querschnitt als Pendel. Der Stab ist oben am äußersten Ende drehbar befestigt. Jeder der beiden Praktikumpartner misst mithilfe einer Stoppuhr zehn mal die Periodendauer für eine Schwingung.

Tabelle 2 zeigt die einzelnen Messergebnisse.

Durchführender	T/s
Tobias	$1.60 \pm 0.02$
Moritz	$1.52 \pm 0.03$

Tobias: T/s	Moritz: T/s
1.67	1.52
1.59	1.41
1.64	1.51
1.55	1.75
1.56	1.56
1.53	1.43
1.71	1.53
1.54	1.49
1.57	1.56

Tabelle 2: Ergebnisse der Zeitnahme mit der Stoppuhr für eine Periode

Die Fehler sind aus der Varianz der Messdaten berechnet.

Wir wiederholen die Messungen, diesmal messen wir jedoch die Zeit für zehn Perioden

Tabelle 4.1 (Seite 7) zeigt die Messwerte. Ergebnisse:

Durchführender	T/s
<b>Tobias</b>	<b><math>1.525 \pm 0.002</math></b>
<b>Moritz</b>	<b><math>1.523 \pm 0.003</math></b>

Mögliche Fehlerquellen sind:

- schlechte zeitliche Auflösung des Auges
- schlechte räumliche Auflösung des Auges (wo ist der Nulldurchgang?)
- langsame Motorik beim Auslösen der Stoppuhr

## 4.2 Objektive Zeitmessung

Wir messen mit Hilfe der Lichtschranke die Zeit für eine Periode.

Tabelle 4 (Seite 7) zeigt die Messwerte. Ergebnis:  $\mathbf{T = (1.519 \pm 0.001)s}$

Neben minimaler statistischer Fehler tritt nur ein geringer, systematischer Fehler auf, der darauf beruht, dass die Lichtschranke trotz aller Sorgfalt nicht genau im Nulldurchgang des Pendels steht. Dieser Fehler ist jedoch sehr gering.

Tobias: 10T/s	Moritz: 10T/s
15.24	15.26
15.23	15.25
15.23	15.11
15.25	15.17
15.15	15.38
15.36	15.31
15.33	15.13
15.25	15.13
15.20	15.32

Tabelle 3: Ergebnisse der Zeitnahme mit der Stoppuhr für zehn Perioden

T/s:	1.52	1.52	1.52	1.52	1.51	1.52	1.52	1.52	1.52	1.52
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Tabelle 4: Ergebnisse der Zeitmessung mit Lichtschranke für eine Periode

### 4.2.1 Auswertung

Die Messung mit der Lichtschranke ist offensichtlich die genaueste, die Messung einer einzelnen Periode per Hand die ungenaueste.

Das liegt an den in 4.1 beschriebenen Fehlern, die sich auf eine einzelne Messung im vollen Umfang auswirken. Bei der Messung von zehn Perioden sollten, wenn man eventuelle Ungenauigkeiten der Stoppuhr ausser acht lässt, der gleiche Absolute Fehler auftreten, der relative Fehler sinkt also um den Faktor zehn.

Bei der Messung mit Lichtschranke ist die größte Fehlerquelle, nämlich die Ungenauigkeit des Experimentators, eliminiert.

Es fällt auf, dass die bei dem Stoppen per Hand die Zeit regelmäßig zu groß gemessen wird.

## 4.3 Physisches Pendel

Aus den Messdaten des vorherigen Versuches ermitteln wir die reduzierte Länge  $\lambda$ :

$$\lambda = g \frac{T^2}{4\pi^2}. \quad (11)$$

Für  $g$  nehmen wir den Literaturwert  $g = 9.81\text{ms}^{-2}$ ,  $T = 1.519\text{s}$  (das ist unser genauester Wert für  $T$ ). Damit folgt  $\lambda = (57.3 \pm 0.1)\text{cm}$ .

Durch Messung der Länge  $l$  des Pendels können wir  $\lambda$  auch aus den geometrischen Daten des Pendels berechnen<sup>1</sup>:

$$\lambda_g = \frac{J_a}{m\frac{l}{2}} \quad (12)$$

$$J_a = \frac{1}{3}ml^2 \quad (13)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}l \quad (14)$$

Wir messen  $l = (86.0 \pm 0.2)\text{cm}$ , daraus ergibt sich  $\lambda_g = (57.3 \pm 0.1)\text{cm}$ , was mit dem vorherigen Ergebnis übereinstimmt.

#### 4.4 Anharmonische Schwingungen

Wir messen nun die Periodendauer für Schwingungen mit grossen Auslenkungen. Dazu benutzen wir zwei verschiedene Pendel<sup>2</sup>:

**Pendel 1:** Ein flacher Messingkörper an einem dünnen Stahlstab.

**Pendel 2:** Ein flacher Aluminiumstab, der ausserhalb des Massenschwerpunkt aufgehängt ist.

Die Zeitmessung erfolgt jeweils über die Lichtschranke.

##### 4.4.1 Messungen mit Pendel 1

Wir lenken das Pendel um einen Winkel  $\varphi$  aus, und halten es mit einem dünnen Perlonfaden in dieser Position. Dann brennen wir den Faden in der Nähe des Pendels durch und starten so die Schwingung. Durch dieses Vorgehen kann ein präziser Maximalausschlag sowie eine Minimierung von unerwünschten Nebenschwingungen erreicht werden.

Wir messen nach dem starten jeweils die Zeit von zwei Perioden, und rechnen mit dem Mittelwert der beiden Zeiten weiter.

Eine Messung für sehr kleine Winkel ergibt  $\mathbf{T}(\varphi = 0) = 1.69\text{s}$ .

Tabelle 5 (Seite 9) Zeigt die Messergebnisse. Sie sind in Abbildung 1 (Seite 10) dargestellt.

---

<sup>1</sup>Wir setzen für  $l$  aus Gleichung (9)  $\frac{l}{2}$  ein, da der Abstand Schwerpunkt-Aufhängpunkt bei einem homogenen, am Ende aufgehängten Stab die Hälfte der Länge ist

<sup>2</sup>Die Numerierung der Pendel unterscheidet sich von der Numerierung in der dazugehörigen Praktikumsanleitung

$\varphi/^\circ$	$T_1/s$	$T_2/s$	$\Rightarrow \bar{T}/S$	$\frac{T(\varphi)-T(0)}{T(0)}$
5	1.68	1.70	1.69	0
10	1.69	1.71	1.70	0.0059
15	1.71	1.71	1.71	0.012
20	1.72	1.72	1.72	0.018
25	1.72	1.72	1.72	0.018
30	1.74	1.73	1.74	0.026
35	1.75	1.74	1.75	0.033
40	1.76	1.75	1.76	0.053
45	1.77	1.77	1.77	0.047
50	1.79	1.78	1.79	0.053
55	1.80	1.79	1.80	0.062
60	1.82	1.82	1.82	0.074

Tabelle 5: Messergebnisse für die Periodendauer von Pendel 1

#### 4.4.2 Messung mit Pendel 2

Wir wiederholten die Messreihe aus dem vorherigen Versuchsteil mit Pendel 2. Allerdings mussten wir das Pendel von Hand starten, da bei den grossen Auslenkungen dieses Versuchsteils und bei der Form des Pendels die Befestigung eines Fadens nicht praktikabel war.

Wegen der recht grossen Dämpfung maßen wir zudem nur die Dauer einer Periode, zusätzlich probierten wir, den Endausschlag abzuschätzen.

Hier fanden wir:  $T(\varphi = 0) = 3.31s$ .

Tabelle 6 (Seite 11) Zeigt die Messergebnisse.

#### 4.4.3 Auswertung

Das Ablesen der Endauslenkungen  $\varphi_{\text{end}}$  war alles andere als genau, da erstens die Skala zum Ablesen nur für Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  geht, und zweitens die schnelle Pendelbewegung nicht genug Zeit lässt, um den Winkel zuverlässig parallaxefrei abzulesen.

Abbildung 1 (Seite 10) zeigt die experimentell ermittelten und die theoretisch zu erwartenden Korrekturen der Periodendauer für grosse Winkel.

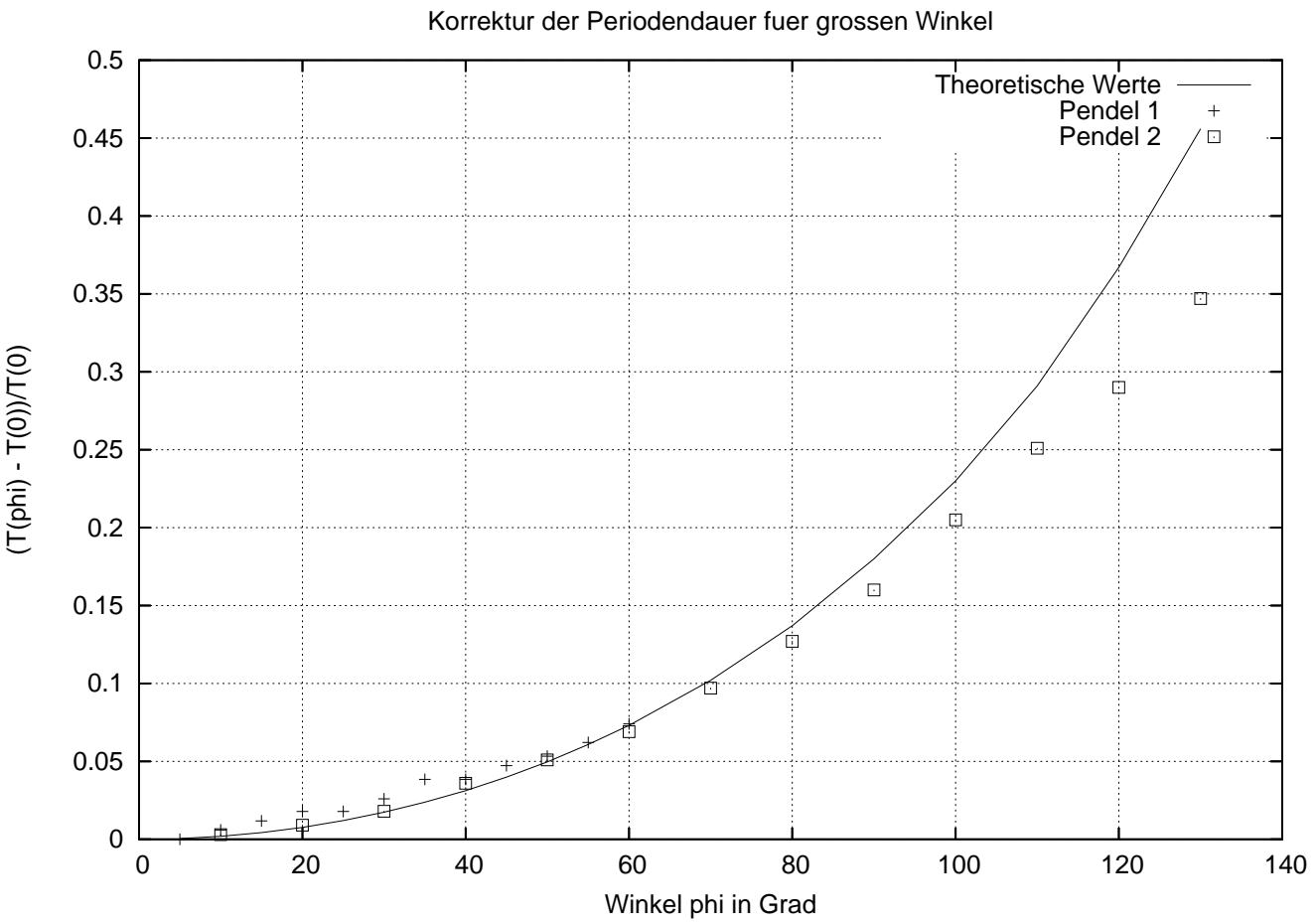


Abbildung 1: Experimentelle und Theoretische Korrektur der Periodendauer für grosse Auslenkungen

$\varphi_{\text{start}}$	$\varphi_{\text{end}}$	$T/s$	$\frac{T(\varphi)-T(0)}{T(0)}$	$\varphi_{\text{start}}$	$\varphi_{\text{end}}$	$T/s$	$\frac{T(\varphi)-T(0)}{T(0)}$
10	9	3.32	0.003	80	78	3.73	0.127
20	18	3.34	0.009	90	84	3.84	0.160
30	28	3.37	0.018	100	96	3.99	0.205
40	38	3.43	0.036	110	100	4.14	0.251
50	46	3.48	0.031	120	107	4.27	0.290
60	55	3.54	0.069	130	117	4.46	0.347
70	67	3.63	0.097	140	125	4.66	0.408

Tabelle 6: Messergebnisse für die Periodendauer von Pendel 2

Dabei fällt auf, dass die Korrekturen für Winkel kleiner als ca.  $50^\circ$  systematisch über den erwarteten Werten liegen. Das kann man durch die Dämpfung des Systems erklären:

Ist die Kreisfrequenz eines ungedämpften Oszillators  $\omega_0$ , so sinkt sie mit der Dämpfung  $\delta$  auf den Wert  $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . Die Periodendauer steigt also:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} > T_0 \quad (15)$$

Für größere Winkel liegen die Messwerte unterhalb der theoretischen Werte. Das liegt an Einschwingvorgängen des Pendel. So vibriert das Pendel, und es schwingt auch außerhalb der Ebene der Hauptschwingung. Das führt zu kaum vorhersehbarem Verhalten und kann für die beobachtete Abweichung verantwortlich sein.

Es handelt sich also um ein System, dass die Voraussetzungen für Gleichung 3 offensichtlich nicht gut erfüllt.

#### 4.4.4 Messung der Erdbeschleunigung

Für diesen Versuchsteil verwendeten wir als Pendel einen kleinen Messingzylinder, der an einem sehr dünnen Draht von der Decke hängt.

Die Länge des Pendels maßen wir zu  $l = (2.120 \pm 0.02)m$  (Von der Aufhängung bis zum Mittelpunkt des Messingzylinder).

Wir lenkten das Pendel ein wenig aus und maßen die Periodendauer zehn mal.

Tabelle 7 zeigt die Messergebnis: wir maßen zehn mal reproduzierbar  $T = 2.92s$ .

Daraus ergibt sich  $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} = 9.8153ms^{-2}$ .

T/s	T/s
2.92	2.92
2.92	2.92
2.92	2.92
2.92	2.92
2.92	2.92

Tabelle 7: Messergebnisse für Versuchsteil 4.4.4

**Fehlerbetrachtung** Da wir für  $T$  zehn mal den gleichen Wert maßen, macht eine Fehlerangabe über die Standardabweichung wenig Sinn. Die Obergrenze von  $\sigma_T$  wird von der Ablesegenauigkeit bestimmt.  $\sigma_T = 5ms$  ist eine gute Abschätzung für den maximalen Fehler.

Aus  $\left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 = 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2$  können wir einen Maximalwert für den rechnerischen Fehler angeben:  $\frac{\sigma_g}{g} = 0.36\%$ ,  $\sigma_g = 0.035ms^{-2}$ . Wir erhalten als Endergebnis  $\mathbf{g = (9.815 \pm 0.035)ms^{-2}}$ .

**Diskussion** Unser Ergebnis für  $g$  stimmt recht gut mit dem Literaturwert ( $g = 9.8067ms^{-2}$  für den 45. Breitengrad, siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Fallbeschleunigung>).

Zu beachten ist allerdings, dass auch der Literaturwert als fehlerbehaftet angesehen muss, da der Ortsfaktor neben dem Breitengrad auch von der Höhe über Normal Null, der Abplattung der Erde (und damit vom Längengrad) und dem Aufbau der Gesteinsschichten unter dem gemessenen Ort abhängt.

Die Fehlerangabe berücksichtigt allerdings noch keine systematischen Fehler. Das ist v.a. eine Eigendrehung des Pendels, die trotz sorgfältiger Durchführung nicht ganz zu vermeiden war. Diese Drehung führt dazu, dass das Pendel nicht genau in einer Ebene schwingt, was wiederum zu systematischen Fehlern führt.