

Supraleiter

Moritz Lenz* and Stefan Uebelacker†

(Dated: 31. März 2006)

Ziel des Versuchs war es, durch Messung des Widerstands einer Zinnprobe in Abhängigkeit der Temperatur und eines von außen angelegten Magnetfeldes die Temperaturabhängigkeit des kritischen Magnetfeldes und die Sprungtemperatur zu messen. Wir haben die kritische Temperatur bei $H = 0$ zu $T_c = (3.670 \pm 0.034)K$ und die kritische Magnetfeldstärke des Phasenübergangs $H_c = (22.0 \pm 0.5) \cdot 10^3 \frac{A}{m}$ bei $T = 0$ bestimmt.

PACS numbers:

I. EINLEITUNG

Die Entdeckung der Supraleitung 1911 durch Onnes hat viele Fragen aufgeworfen, die zum Teil bis heute nicht geklärt sind. Die Forschung an supraleitenden Materialien hat grundlegende Erkenntnisse zum Verständnis der Festkörper hervorgebracht und verspricht technische Anwendungen in den unterschiedlichsten Bereichen.

In diesem Versuch haben wir den Widerstand einer durch flüssiges Helium gekühlten Zinnprobe bei verschiedenen Magnetfeldstärken und Temperaturen gemessen und dabei den Übergang zum supraleitenden Zustand beobachtet.

Dazu haben wir das Magnetfeld an der Probe kontinuierlich verstärkt und wieder abgeschwächt und dabei die langsam driftenden Temperatur sowie den Probenwiderstand gemessen. Bei jedem Sprung zwischen normalem und supraleitendem Zustand haben wir die Temperatur und die Magnetfeldstärke notiert und damit $H_c(T)$ gemessen.

Durch unsere Messungen konnten wir die quadratische Abhängigkeit der kritischen Magnetfeldstärke von der Temperatur zu $H_c(t) = (22.0 \pm 0.5) \cdot 10^3 \frac{A}{m} (1 - (T/(3.75 \pm 0.02)K)^2)$ und die kritische Temperatur bei $H = 0$ zu $(3.670 \pm 0.034)K$ bestimmen.

II. THEORIE

A. Phänomenologie der Supraleitung

Kühlt man bestimmte Materialien unter eine materialspezifische kritische Temperatur ab, so stellt man fest, dass ein Phasenübergang stattfindet: Das Material wird zum Supraleiter, das heißt der Widerstand ist nur unmessbar größer als 0, und von außen angelegten Magnetfelder werden aus dem Inneren des Leiters verdrängt. Den zweiten Effekt nennt man Meißner- Ochsensfeld- Effekt. Er wird durch Kreisströme in der Nähe der Oberflä-

che des Materials verursacht, die ein äußeres Magnetfeld kompensieren.

Dabei fällt das Magnetfeld exponentiell mit der Entfernung zur Oberfläche ab, die Eindringtiefe λ liegt typischerweise in der Größenordnung einiger zig bis hundert Nanometer[1].

Erreicht das von außen angelegte Magnetfeld jedoch einen temperaturabhängigen Wert H_c , so verliert das Material seinen supraleitenden Zustand und das Magnetfeld dringt ein.

Wir unterscheiden zwischen Supraleitern erster und zweiter Art: Bei Supraleitern erster Art steigt die Magnetisierung des Materials linear mit dem äußeren Feld an, bei dem kritischen Feld $H = H_c$ fällt sie auf 0.

Bei Supraleitern zweiter Art hingegen wird der Meißner- Ochsensfeld- Effekt schon ab einem Magnetfeld $H_{c1} < H_c$ teilweise gestört, verschwindet aber erst bei einem $H_{c2} > H_c$ vollständig

Im Folgenden betrachten wir nur noch Supraleiter erster Art, da unsere Probe ein solcher ist.

Die Geometrie der Probe hat einen Einfluß auf das Verhalten in der Nähe des kritischen Magnetfeldes. Betrachten wir einen Rotationsellipsoid mit Exzentrizität $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ mit der großen Halbachse a und der kleinen Halbachse b . Dann ist der Entmagnetisierungsfaktor gegeben durch

$$n = (e^{-2} - 1) \cdot \left(\frac{1}{2e^2} \ln \frac{1+e}{1-e} - 1 \right) \quad (1)$$

Ist das äußere Magnetfeld H_a in einem Bereich zwischen $(1-n)H_c$ und H_c , so befindet sich der Supraleiter in einem Zwischenzustand, der aus supra- und normalleitenden Bereichen aufgebaut ist. Die Aufteilung in normal- und supraleitende Bereiche kann dabei sehr kompliziert aussehen.

Im Fall eines unendlich langen Zylinders, der in Richtung des Feldes ausgerichtet ist ($n = 0$), wird allerdings die ganze Probe unterhalb von $H = H_c$ supraleitend.

Theoretisch läßt sich für einen unendlich langen Zylinder eines Supraleiters folgender Zusammenhang zwischen kritischem Magnetfeld und kritischer Temperatur herleiten:

$$H_c = H_{c,T=0} \left(1 - \sum_{n=2}^N a_n \left(\frac{T}{T_c} \right)^n \right) \quad (2)$$

*Electronic address: mlenz@physik.uni-wuerzburg.de;
URL: <http://moritz.faiu2k3.org>

†Electronic address: uuuuhhh@web.de

Zur Vereinfachung vernachlässigen wir die Terme der Ordnungen 3 und höher. Unser Messungen bestätigen den parabelförmigen Verlauf.

$$H_c = H_{c,T=0} \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right) \quad (3)$$

B. BCS- Theorie

Die BCS- Theorie ist die bisher vollständigste Theorie zur Supraleitung.

Die Elektronen bilden durch Wechselwirkung mit dem Atomgitter sogenannte Cooper-Paare, d.h. ein Elektron nutzt die Verformung, des Ionen- gitters durch das andere Elektron um eine niedrigere potentielle Energie zu bekommen, die beiden Elektronen besetzen dann einen quantenmechanischen Zustand..

Es zeigt sich, dass es besonders günstig ist, wenn zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin und Impuls ein Cooper- Paar bilden, d.h. ein Elektron nutzt die Verformung, des Ionen- gitters durch das andere Elektron um eine niedrigere potentielle Energie zu bekommen, die beiden Elektronen besetzen dann einen quantenmechanischen Zustand. Legt man nun ein äußeres elektrisches Feld an[4], so werden die Cooper- Paare beschleunigt und erhalten eine kinetische Energie, die für alle gleich ist, d.h. die Cooper- Paare wechselwirken nicht mit dem Gitter und der Ladunstransport findet ungehindert statt.

Besitzen die Elektronen eine Energie, die groß ist gegenüber dem Energiegewinn bei Cooper- Paarbildung, so werden die Cooper- Paare aufgebrochen und somit der supraleitende Zustand zerstört. Daraus ist ersichtlich, dass zu große Temperaturen, sowie äußere Magnet- und elektrische Felder Supraleitung verhindern.

C. Verhalten von Helium bei tiefen Temperaturen

Das Helium hat zwei flüssige Phasen: eine normal- und eine superflüssige Phase.

Unterhalb einer bestimmten Temperatur, des sog. λ -Punktes, der bei $T = 2.17K$ liegt, spricht man von der superfluiden Phase. In diesem Zustand bildet das Helium ein Bose-Einstein-Kondensat, d.h. alle Heliumatome besetzen den gleichen Quantenzustand. Dadurch bekommt das Helium erstaunliche Eigenschaften: es verliert seine Viskosität und besitzt eine unendliche Wärmeleitfähigkeit. Da es dann keinen Temperaturgradienten mehr gibt, siedet das Helium ausschließlich an der Oberfläche.

III. VERSUCH

A. Versuchsaufbau

Wir messen mit einem Kryostaten in dessen innerer Kammer eine Spule mit den in Abschnitt IIIB angege-

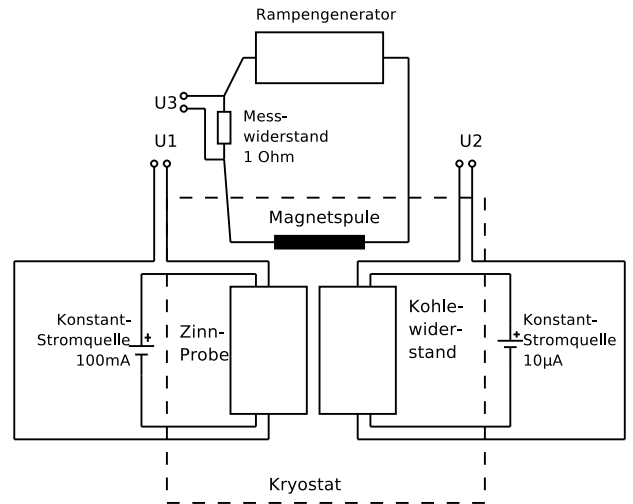


Abb. 1: Beschaltungsschema der Messung des kritischen Magnetfelds unter kritischer Temperatur. $U1$, $U2$ und $U3$ sind über Digitalvoltmeter mit einem PC verbunden.

ben Abmessungen hängt. Darin ist ein Kohlewiderstand zur Temperaturmessung und die Zinnprobe montiert. Die Spule kann mit einem Rampengenerator mit einem Dreiecksstrom versorgt werden, deren Spannung mit einem Digitalvoltmeter gemessen werden.

Die innere Kammer wird mit flüssigem Helium gefüllt, die äußere, die die innere Kammer umschließt, wird mit flüssigem Stickstoff befüllt. Dazwischen ist eine Vakuumkammer, ebenso ausserhalb der äußeren Kammer. Uns stehen drei Manometer zur Verfügung: ein digitales mit Anzeigeberich $0 \dots 1999mbar$, ein analoges mit Anzeigebereich $0 \dots 600torr$, wobei der Ablesefehler erst unterhalb von $85torr$ akzeptabel klein wird, d.h. kleiner als 5% wird, und ein weiteres analoges Manometer mit Anzeigebereich $0 \dots 150torr$.

Die Probe besteht aus 130cm reinen Zinnrahts mit Durchmesser $d = 0.5mm$ und ist in Spulenform gewickelt. Die Spulenachse der Probe steht senkrecht zur Achse der äußeren Spule. Die Probe wird mit einem konstanten Strom von $I_P = 100mA$ durchflossen, die an der Probe anfallene Spannung wird ebenfalls mit einem Digitalvoltmeter gemessen.

Der Kohlewiderstand ist mit einer Konstantstromquelle verbunden, die $I_R = 10\mu A$ liefert. Über eine Messbrücke wird die dort anfallende Spannung mit einem dritten Digitalvoltmeter gemessen.

Alle drei Voltmeter sind über ein IEEE-Interface an einen Computer angeschlossen, der im Sekundentakt die Spannungen aufzeichnet. Abb. 1 zeigt ein Schema des Versuchsaufbaus.

B. Numerische Überprüfung des Magnetfelds der Spule

Betz[2] hat für das Magnetfeld im Mittelpunkt einer Spule mit Innenradius r_i , Aussenradius r_a , Länge l und Windungszahl N beim Strom I folgenden Gleichung angegeben:

$$\frac{H}{I} = \frac{\pi N}{5(r_a - r_i)} \ln \frac{r_a + \sqrt{r_a^2 + l^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + l^2}} \quad (4)$$

Um das zu überprüfen, haben wir ein C++-Programm geschrieben, das die Spule als regelmäßige Anordnung von Leiterschleifen darstellt und die Magnetfelder der einzelnen Leiterschleifen addiert.

Abb. 7 zeigt den Quellcode, Abb. 2 die Ergebnisse der Simulation.

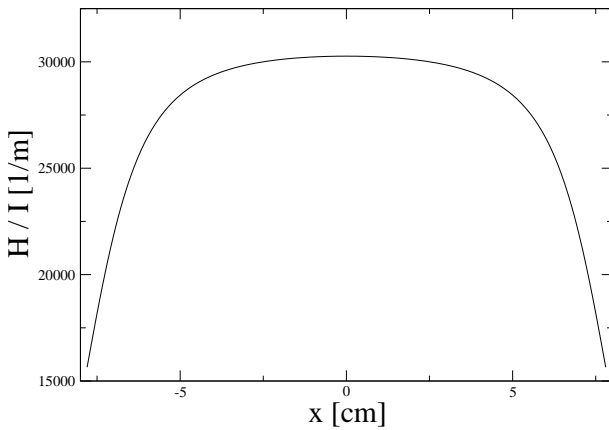


Abb. 2: Magnetfeld pro Strom entlang der Längsachse der Spule, numerisch berechnet. Der Ursprung liegt in der Mitte der Spule. Das Magnetfeld variiert im Bereich $x = -2.5\text{cm} \dots 2.5\text{cm}$ nur um 1%.

Mit den Werten[2] $l = 15.6\text{cm}$, $r_i = 1.15\text{cm}$, $r_a = 2.155$ und $N = 4865$ konnten wir die $\frac{H}{I} = 38316\text{m}^{-1}$ aus Gleichung (4) nicht verifizieren, wir erhalten

$$\frac{H}{I} = 30267\text{m}^{-1}, \quad (5)$$

was wir im folgenden verwenden.

C. Eichung des Kohlewiderstands

Mit einer Pumpe evakuieren wir langsam die Heliumkammer und kühlen sie damit herunter. Wir messen für 71 Drücke die Spannung U_R am Kohlewiderstand. Abb. 6 im Anhang zeigt die Messdaten.

Aus der bekannten[3] Dampfdrucktabelle des Heliums können wir die entsprechenden Temperaturen ablesen.

Da der Kohlewiderstand ein NTC ist, erwarten wir (bei konstantem Strom) die Abhängigkeit

$$R(T) \sim U(T) = \alpha e^{\frac{\beta}{T}} \quad (6)$$

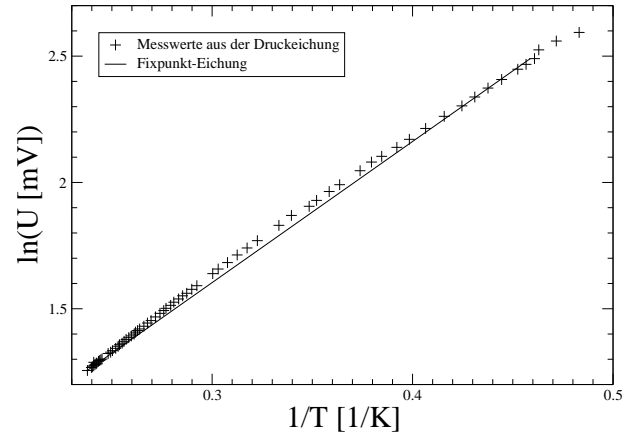


Abb. 3: Eichung des Kohlewiderstands: Spannung (logarithmisch) über inverse Temperatur. Eingezeichnet sind die Messwerte aus der Eichung über den Druck sowie die Gerade aus der Eichung mit Fixpunkten (durchgezogene Linie). Die Messwerte aus der Druckeichung sind Mittelwerte aus den verschiedenen Druckmessungen, Abb. 6 im Anhang zeigt die einzelnen Werte.

und tragen $\ln R(T)$ gegen T^{-1} auf (Abb. 3)

Durch Interpolation zwischen zwei Messpunkten können wir jeder Spannung einer Temperatur zuordnen.

Eine weitere Möglichkeit zur Eichung ist, aus den bekannten Temperaturwerte der Siedetemperatur des Heliums bei Normaldruck sowie des λ -Punkts eine Eichkurve gemäß Gleichung (6) zu berechnen. Dieses Verfahren hat den Nachteil, dass nur zwei Wertepaare zur Bestimmung von zwei Parametern verwendet werden. Man muss sich also darauf verlassen, dass Gl. (6) das tatsächliche Verhalten des Widerstands widerspiegelt und dass die beiden Wertepaare fehlerarm gemessen wurden.

Wir messen $U_s = 3.502\text{mV}$ und $U_\lambda = 12.065\text{mV}$, aus der Literatur bekannt ist $T_s = 4.21\text{K}$ und $T_\lambda = 2.18\text{K}$.

Daraus erhalten wir

$$\ln \left(\frac{U}{\text{mV}} \right) = 5.5879 \frac{1\text{K}}{T} - 0.0730. \quad (7)$$

In dem verwendeten Temperaturbereich liegt die Abweichung der Temperaturen nach beiden Methoden bei maximal $\Delta T = 0.1\text{K}$.

Aus den oben erwähnten Gründen vertrauen dem Ergebnis der Fixpunkteichung weniger als dem vorherigen, und werden es deswegen in der weiteren Auswertung lediglich zur Fehlerabschätzung der Temperatur verwenden.

D. Beobachtung des Flüssigen He beim λ -Punkt

Oberhalb des λ -Punkts siedet das flüssige Helium, überall in der Flüssigkeit bilden sich kleine Bläschen, die sich schnell nach oben bewegen.

In der supraflüssigen Phase (also unterhalb des λ -Punkts) ist die Oberfläche spiegelglatt, man sieht keine

Bläschen mehr aufsteigen.

Das lässt sich durch die hohe, theoretisch unendlich hohe Wärmeleitfähigkeit des Helium in dieser Phase erklären, die keinerlei Temperaturgradienten zulässt. Alle Siedevorgänge finden also an der Oberfläche statt.

E. Messung des kritischen Magnetfelds

Wir legen an der Spule eine Dreiecksspannung an und messen gleichzeitig den Widerstand der Probe und des Kohlewiderstands sowie den Spulenstrom.

Abb. 5 auf Seite 6 zeigt die einen Ausschnitt aus den Rohdaten. Bei jedem Übergang zwischen normal- und supraleitendem Übergang und zurück notieren wir $H(T)$ [5].

Je nach dem Vorzeichen des Magnetstroms variierte $|H(T)|$ (die Temperaturdrift ist vernachlässigbar). Das könnte auf den Einfluss des Erdmagnetfelds zurückzuführen sein. Um diese Einflüsse rechnerisch zu eliminieren, bilden wir den Mittelwert der Beträge der kritischen Magnetfelder bei I_B und $-I_B$.

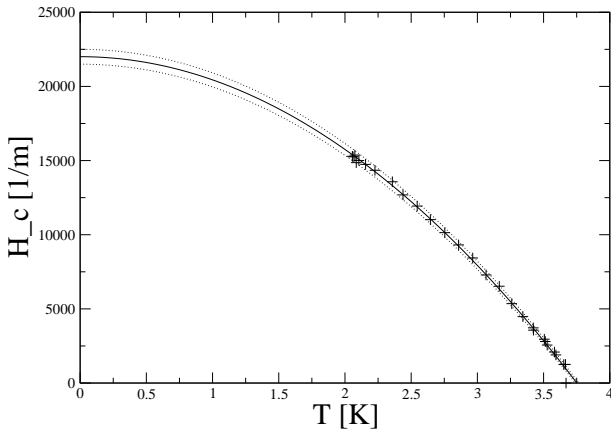


Abb. 4: Kritisches Magnetfeld in Abhängigkeit der Temperatur. Mit quadratischem Fit.

Wir fitten Gl. (3) gegen die die gemessenen $H(T)$ (inclusive des Werts für $T_{c,T=0}$ aus dem nächsten Abschnitt) und erhalten (Abb. 4)

$$H_{c,T=0} = (22.0 \pm 0.5) \cdot 10^3 \frac{A}{m} \quad (8)$$

$$T_c = (3.75 \pm 0.02)K \quad (9)$$

Umgerechnet in eine magnetische Flussdichte im Vakuum sind das $B_{c,T=0} = (277 \pm 6)G$, der Literaturwert[2] beträgt $B_{c,T=0}^{lit} = 306G$.

Die Fehler sind eine Abschätzung durch Variation der Fitparameter (s. Abb. 4).

Die große Differenz zwischen Literaturwert und Messergebnis legt nahe, dass die Temperatur zu gross gemessen

wurde oder der Zusammenhang zwischen Magnetstrom und Magnetfeld falsch berechnet wurde.

F. Messung der kritischen Temperatur

Wir schalten den Magnetstrom ab und senken durch Vermindern des Drucks im System die Temperatur bis die Probe supraleitend wird. Dann warten wir während sich die Probe erwärmt. Geht die Probe wieder in den normalleitenden Zustand über, senken wir die Temperatur.

Wir messen bei sechs dieser Zyklen die Spannung am Kohlewiderstand (und damit die Temperatur) und den Widerstand. Abb. 5 auf Seite 6 zeigt die Rohdaten.

Daraus können wir die zwölf gemessenen Sprungtemperaturen bestimmen, deren Mittelwert

$$T_c = (3.670 \pm 0.034)K \quad (10)$$

unser Ergebnis ist.

Der Fehler setzt sich einerseits aus dem Fehler der Temperaturmessung und andererseits aus der Standardabweichung der Werte zusammen.

Unser Wert ist mit dem Literaturwert[2] $T_c^{lit} = 3.722K$ fast vereinbar, die obere Grenze liegt nur 0.5% vom Literaturwert entfernt.

Die Fehler sind vor allem in der Temperaturmessung und in Temperaturschwankungen innerhalb der Probe zu suchen. Ausserdem erhöht das Magnetfeld der Erde die kritische Temperatur unserer Probe.

Das Erdmagnetfeld erklärt auch, warum die hier gemessene kritische Temperatur geringfügig über der Messung im vorherigen Abschnitt ist (aber noch innerhalb der Fehlergrenzen liegt). Dort hatten wir das Erdmagnetfeld herausgerechnet.

IV. ERGEBNISSE

Wir haben den Zusammenhang zwischen kritischem Magnetfeld und der Temperatur zu

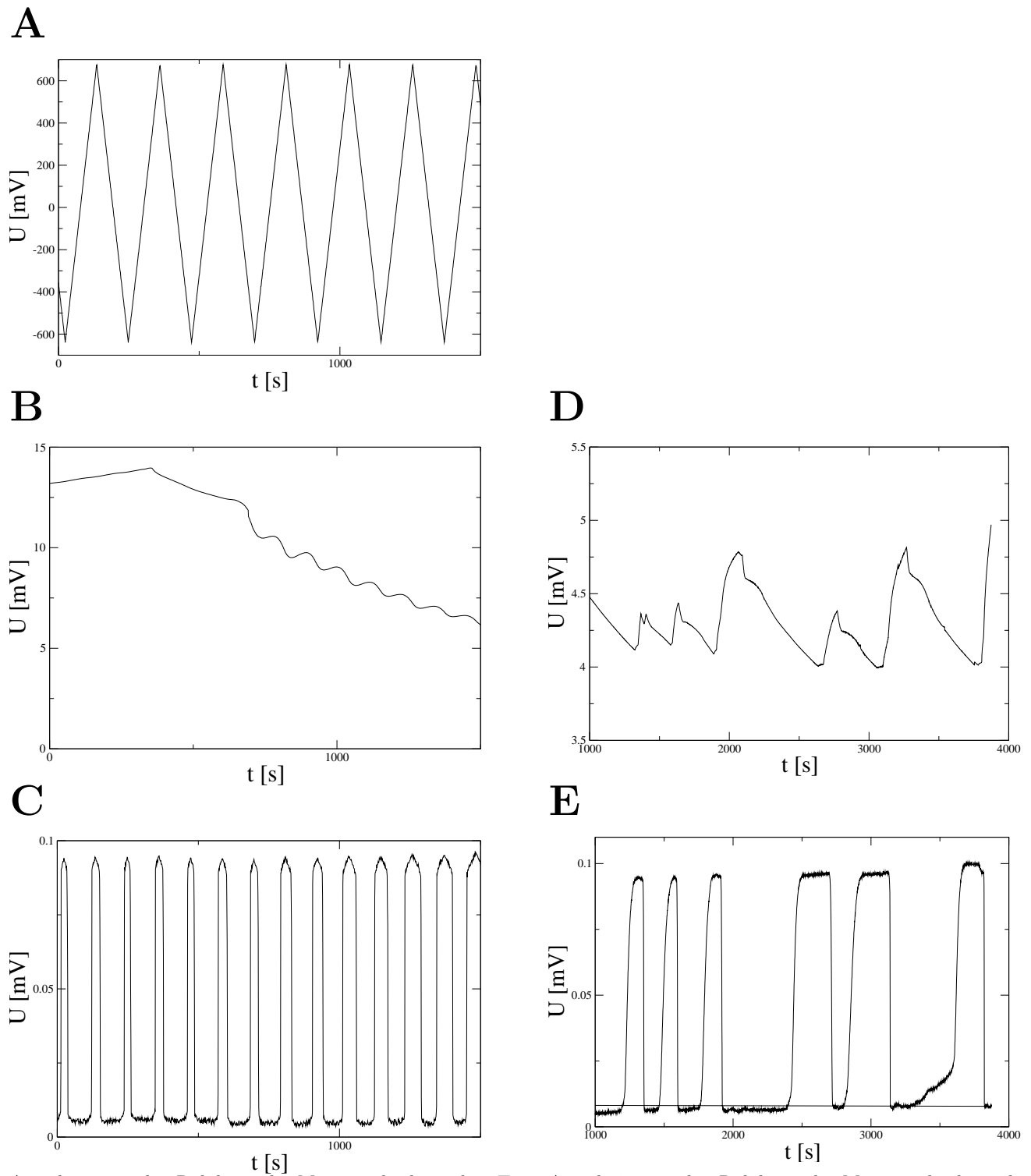
$$H_c(t) = (22.0 \pm 0.5) \cdot 10^3 \frac{A}{m} (1 - (T/(3.75 \pm 0.02)K)^2) \quad (11)$$

bestimmt, mit dem kritischen Magnetfeld $H_c = (22.1 \pm 0.4) \cdot 10^3 \frac{A}{m}$.

Eine gesonderte Messung lieferte für die kritische Temperatur $T_c = 3.670 \pm 0.034K$.

Die kritische Temperatur stimmt fast mit dem Literaturwert $T_c^{lit} = 3.722K$ überein. Das kritische Magnetfeld weicht deutlich stärker vom Literaturwert ab. Wie in Abschnitt III F diskutiert, ist das vor allem auf eine ungenaue Eichung der Spule zurückzuführen.

-
- [1] C. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik* (1991), 9th ed.
- [2] H. R. Betz, *Planung und Aufbau eines Praktikumsversuches zur Messung der kritischen Temperatur und des kritischen Magnetfeldes von Zinn beim Übergang in den supraleitenden Zustand*. (G. Landwehr, 1973).
- [3] Reinert and Batke, *Fortgeschrittenenpraktikum SS 2006* (2006).
- [4] dieses darf einen kritischen Wert nicht überschreiten um die Cooper- Paare nicht aufzubrechen
- [5] Die kompletten Rohdaten gibt es im Internet:
<http://moritz.fau2k3.org/physik/daten/supraleitung.tar.bz2>



Ausschnitt aus den Rohdaten der Messung der kritischen Temperatur. Abgebildet sind die Spannung, die am Kohlewiderstand zur Temperaturmessung abfällt (**D**) und der Widerstand der Probe (**E**). Ausschnitt aus den Rohdaten der Messung des kritischen Magnetfelds. Abgebildet sind des Magnetfeld (**A**), die Spannung, die am Kohlewiderstand zur Temperaturmessung abfällt (**A**) und der Widerstand der Probe (**A**). Die Übergänge zwischen normal- und supraleitendem Zustand sind deutlich zu sehen.

Abb. 5: Rohdaten der Messungen von H_c und T_c

$U_R[mV]$	$p_1[mbar]$	$U_R[mV]$	$p_1[mbar]$	$p_2[torr]$	$p_3[torr]$
3.502	1012	4.599	507	-	-
3.51	1003	4.659	490	-	-
3.552	972	4.717	477	-	-
3.562	964	4.765	464	-	-
3.579	955	4.840	447	-	-
3.595	942	4.910	432	-	-
3.605	936	5.150	385	-	-
3.615	929	5.245	370	-	-
3.626	921	5.380	345	-	-
3.640	914	5.546	322	-	-
3.651	907	5.701	300	-	-
3.662	899	5.868	281	-	-
3.673	893	6.235	243	-	-
3.755	847	6.484	223	-	-
3.774	833	6.724	206	144	-
3.797	818	6.883	195	136	-
3.832	800	7.129	180	125	-
3.864	784	7.324	170	118	-
3.887	772	7.740	150	102	-
3.911	760	8.011	139	95	-
3.940	746	8.195	131	90	-
3.970	732	8.491	122	83	82
3.997	720	8.765	113	76	75
4.025	706	9.151	103	69	68
4.054	693	9.600	93	62	60
4.085	681	10.006	85	56	54
4.111	670	10.364	79	51	49
4.137	660	10.736	74	47	45
4.182	642	11.106	68	44	41
4.235	622	11.567	62	40	38
4.276	607	11.792	60	38	36
4.339	585	12.065	57	36	33
4.401	565	12.49	56	35	32
4.450	550	12.933	52	32	29
4.489	538	13.383	46	27.5	24
4.543	522				

Abb. 6: Rohdaten der Temperatureichung. p_1 ist der am Digitalmanometer abgelesene Druck, p_2 und p_3 sind die an den Analogmanometern abgelesenen Drücke, ein einfaches '-' zeigt an, dass kein Wert abgelesen wurde.

```

// Moritz Lenz, Stefan Uebelacker
// mit 'g++ -Wall -ansi -O spule.cpp' mit dem C++-Compiler der "Gnu Compiler
// Collection" (GCC) compilieren
#include <iostream>
#include <math.h>
using std::cout; using std::endl;

// Alle Groessen sollten in SI-Einheiten (m, kg, s, A etc.) angegeben werden.
// Die Ausgabe der ersten Koordinaten ist allerdings in cm.

// Innenradius:
const double r_i = 0.015;
// Aussenradius:
const double r_a = 0.02155;
const double laenge = 0.156;
const int anzahl_windungen = 4865;
const int anzahl_schichten = 15;
const int w = anzahl_windungen / anzahl_schichten;

// Anzahl der berechneten Punkte:
const int n = 200;

int main(int argc, char** argv){
    // Die innersten Anweisungen werden nur anzahl_schichten * w mal
    // durchlaufen, obwohl anzahl_windungen Windungen vorhanden sind.
    // Durch das multiplizieren mit dem Korrekturfaktor wird dieser Fehler
    // groesstenteils ausgeglichen.
    double korrektur = (double) anzahl_windungen / (double) (anzahl_schichten * w);
    // Starte bei -l/2 und gehe zu +l/2, Ursprung liegt in der Mitte der
    // Spule:
    for (int i = 0; i < n; i++){
        double x = laenge * (double) i / (double) (n-1) - laenge / 2.0;
        cout << x * 100.0 << '\t';
        double b = 0.0;
        for (int j = 0; j < anzahl_schichten; j++){
            double r = r_i + j * (r_a - r_i)
                / ((double) anzahl_schichten - 1.0);
            for (int k = 0; k < w; k++){
                double z = (double) k * laenge
                    / ((double) w - 1.0) - 0.5*laenge;
                b += r*r
                    / (2.0 * pow((z-x)*(z-x) + r*r, 1.5));
            }
        }
        cout << b * korrektur << endl;
    }
    return 0;
}

```

Abb. 7: Quellcode des C++ - Programms zur numerischen Überprüfung des Magnetfelds der Spule.